Azzolini Riccardo 2019-03-12

o-piccolo, ordine di infiniti e infinitesimi, e asintotici

1 o-piccolo

Si dice che $f(x)$ è un **o-piccolo** di $g(x)$ per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$, e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Osservazione: Se $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$, allora la funzione tende a 0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

1.1 Esempi

$$f(x) = x \qquad g(x) = x^3$$

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

  quindi $f(x) = o(g(x))$ per $x \to +\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

  quindi $f(x) \neq o(g(x))$ per $x \to 0$. Vale invece il contrario, $g(x) = o(f(x))$ per $x \to 0$, perché

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

2 Ordine di infiniti e infinitesimi

- Siano $f(x)$ e $g(x)$ due *infiniti* per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$. Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$

  si dice che

  - $g(x)$ è un **infinito di ordine superiore** rispetto a $f(x)$;
  - $f(x)$ è un **infinito di ordine inferiore** rispetto a $g(x)$.

- Siano invece $f(x)$ e $g(x)$ due *infinitesimi* per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$. Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$

  allora

  - $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** rispetto a $g(x)$;
  - $g(x)$ è un **infinitesimo di ordine inferiore** rispetto a $f(x)$.

Sia per gli infiniti che per gli infinitesimi, invece, $f(x)$ e $g(x)$ sono

- **infiniti** o **infinitesimi dello stesso ordine** per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- **non confrontabili** per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ se né $\frac{f(x)}{g(x)}$ né $\frac{g(x)}{f(x)}$ ammettono limite finito per $x \to x_0$.

2.1 Rispetto a infiniti e infinitesimi campione

- Sia $f(x)$ un *infinito* per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$. Si dice che $f(x)$ è un **infinito di ordine** α, con $\alpha > 0$, se $x_0 \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

  oppure se $x_0 = \pm\infty$ e

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

dove $\frac{1}{|x-x_0|}$ e x sono **infiniti campione**.

- Sia $f(x)$ un *infinitesimo* per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$. $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine** α, con $\alpha > 0$, se $x_0 \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{|x - x_0|^\alpha} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

oppure se $x_0 = \pm\infty$ e

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

dove $|x - x_0|$ e $\frac{1}{x}$ sono **infinitesimi campione**.

Osservazione: Non tutti gli infiniti e gli infinitesimi hanno un ordine preciso. Ad esempio:

- l'esponenziale $f(x) = a^x$, $a > 1$ ha ordine di infinito superiore a tutte le potenze di x perché, $\forall \alpha > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{se } a > 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{se } 0 < a < 1$$

- il logaritmo $f(x) = \log_a x$ ha ordine di infinito inferiore a tutte le potenze di x perché, $\forall \alpha > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$$

- $f(x) = x(2 + \sin x)$ è un infinito che non ha un ordine preciso, perché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x(2 + \sin x)}{x^\alpha} \begin{cases} \nexists & \text{se } \alpha = 1 \\ = 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ = +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

3 Asintotico

Se $x_0 \in \mathbb{R}^*$ e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

si dice che $f(x)$ è **asintotico** a $g(x)$ per $x \to x_0$, e si scrive

$$f(x) \sim g(x) \text{ per } x \to x_0$$

Osservazione: Se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

allora $f(x) \sim l \cdot g(x)$ per $x \to x_0$.

4 Asintotici, o-piccoli e limiti

Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

e di conseguenza è (solitamente) possibile sostituire $f(x)$ con $g(x)$ per semplificare il calcolo dei limiti.

Se invece $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} [g(x) + o(g(x))] = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

cioè, in generale,

$$g(x) + o(g(x)) \sim g(x) \text{ per } x \to x_0$$

In pratica, quindi, nel calcolare il limite di una somma è possibile trascurare gli o-piccoli, ovvero gli infiniti di ordine inferiore ("più lenti") o gli infinitesimi di ordine superiore ("più veloci").

Sostituire una funzione con il suo asintotico **non è lecito** se l'asintotico si elimina *completamente* semplificando. Infatti, la sostituzione con un asintotico corrisponde a trascurare gli o-piccoli, che non si può fare se questi ultimi restano "da soli" dopo la semplificazione.

5 Asintotici dai limiti notevoli

Da ogni limite notevole della forma

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

si può ricavare che $f(x) \sim l \cdot g(x)$ per $x \to x_0$:

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \sin x \sim x$ per $x \to 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \iff 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \iff e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1 \iff \log(1 + x) \sim x$ per $x \to 0$

eccetera.

Lo stesso vale per le forme generalizzate dei limiti notevoli. Ad esempio:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \implies \frac{\sin f(x)}{f(x)} \sim f(x) \text{ per } x \to x_0$$

5.1 Esempio

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(\sin x)(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot x} = \frac{1}{2}$$