Azzolini Riccardo 2018-11-23

Spazi vettoriali

1 Spazio vettoriale

Sia $(K, +, \cdot)$ un campo. Uno **spazio vettoriale** su K è una struttura $(V, +, \cdot)$ dove

- $+$ è un'operazione interna

  $$+ : V \times V \to V$$

  tale che $(V, +)$ è un gruppo commutativo

- $\cdot$ è un'**operazione esterna**

  $$\cdot : K \times V \to V$$

  che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ e $u, v \in V$:

$$
\begin{gathered}
1 \cdot u = u \\
(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot u = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot u \\
\lambda_1 \cdot (u + v) = \lambda_1 \cdot u + \lambda_1 \cdot v \\
\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot u) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot u
\end{gathered}
$$

Gli elementi di V si chiamano **vettori** e quelli di K si chiamano **scalari**.

1.1 Esempio

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ è uno spazio vettoriale su R con le operazioni di *somma tra vettori* e *prodotto per uno scalare*:

$$\begin{gathered}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ r \cdot (x, y) = (r \cdot x, r \cdot y)\end{gathered}$$

Verifica delle proprietà dell'operazione esterna:

$$1 \cdot (x, y) = (x, y)$$

$$\begin{aligned}(r + s) \cdot (x, y) &= ((r + s)x, (r + s)y)\\ &= (rx + sx, ry + sy)\\ &= (rx, ry) + (sx, sy)\\ &= r \cdot (x, y) + s \cdot (x, y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r \cdot ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= r \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ &= (r(x_1 + x_2), r(y_1 + y_2))\\ &= (rx_1 + rx_2, ry_1 + ry_2)\\ &= (rx_1, ry_1) + (rx_2, ry_2)\\ &= r \cdot (x_1, y_1) + r \cdot (x_2, y_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r \cdot (s \cdot (x, y)) &= r \cdot (sx, sy)\\ &= (rsx, rsy)\\ &= rs \cdot (x, y)\end{aligned}$$

2 Interpretazione geometrica di $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ si può rappresentare graficamente nel piano cartesiano: ogni coppia (x, y) corrisponde

- al punto di coordinate (x, y)
- al vettore che parte dall'origine degli assi e arriva al punto (x, y)

3 Indipendenza lineare di vettori

Negli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$, m vettori $u_1, \dots, u_m$ sono *linearmente indipendenti* se

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = m$$

3.1 Esempio

$$u_1 = (1, 2, 3) \quad u_2 = (1, 0, 1) \quad u_3 = (1, 0, 0) \qquad u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\det U = 2 \neq 0 \implies \operatorname{rg} U = 3$$

Quindi l'insieme $\{u_1, u_2, u_3\}$ è linearmente indipendente.

$$u_4 = (1, -2, -1)$$

$$U' = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\det U' = 0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \implies \operatorname{rg} U' = 2$$

Quindi $\{u_1, u_2, u_4\}$ *non* è linearmente indipendente. u_4 è infatti una combinazione lineare di u_1 e u_2 tramite i coefficienti -1 e 2:

$$-u_1 + 2u_2 = (-1, -2, -3) + (2, 0, 2) = (1, -2, -1) = u_4$$