Azzolini Riccardo 2019-05-07

Integrazione di funzioni razionali

1 Numeratore di 1° grado e denominatore di 2° grado

1.1 Denominatore con $\Delta < 0$

$$\int \frac{3x-1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \qquad \Delta = 4 - 8 < 0$$

Facendo comparire al numeratore la derivata del denominatore ci si riconduce alla somma di un'integrale calcolabile per sostituzione e uno con numeratore 1:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x-1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x &= 3\int \frac{x-\frac{1}{3}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x-\frac{2}{3}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x-2+2-\frac{2}{3}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{3}{2}\int \frac{2-\frac{2}{3}}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\log\lvert\underbrace{x^2-2x+2}_{>0}\rvert + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\log\left(x^2-2x+2\right) + 2\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Per comodità, si calcola separatamente l'integrale

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\underbrace{x^2-2x}_{\substack{\text{completamento}\\ \text{del quadrato}}}+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\underbrace{x^2-2x+1}-1+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad t = x-1 \implies \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \operatorname{arctg} t + c \\
&= \operatorname{arctg}(x-1) + c
\end{aligned}
$$

La soluzione dell'integrale complessivo è quindi:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-2x+2} = \frac{3}{2}\log\left(x^2-2x+2\right) + 2\operatorname{arctg}(x-1) + c$$

1.2 Denominatore con $\Delta > 0$

$$\int \frac{x+2}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x \qquad \Delta = 9-8 = 1 > 0$$

Anche in questo caso si potrebbe procedere facendo comparire al numeratore la derivata del denominatore, ma risulta più semplice spezzare direttamente la funzione integranda in due frazioni:

$$x_{1,2} = \frac{3\pm 1}{2} \implies \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \implies \frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{x+2}{(x-2)(x-1)}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{x+2}{(x-2)(x-1)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} \\
&= \frac{Ax - A + Bx - 2B}{(x-2)(x-1)} \\
&= \frac{(A+B)x - A - 2B}{(x-2)(x-1)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A - 2B = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1 - B \\ B - 1 - 2B = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1 + 3 = 4 \\ -B = 3 \implies B = -3 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{(x-2)(x-1)}\,\mathrm{d}x &= 4\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\log|x-2| - 3\log|x-1| + c
\end{aligned}
$$

1.3 Denominatore con $\Delta = 0$

$$\int \frac{x+3}{x^2-6x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$\Delta = 36-36=0 \qquad x_{1,2}=\frac{6}{2}=3$$
$$\frac{x+3}{x^2-6x+9}=\frac{x+3}{(x-3)^2}$$

La funzione integranda si suddivide in due frazioni con denominatori $x-3$ e $(x-3)^2$:

$$\frac{x+3}{(x-3)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}=\frac{Ax-3A+B}{(x-3)^2}$$
$$\begin{cases} A=1 \\ -3A+B=3 \end{cases} \implies \begin{cases} A=1 \\ B=3+3A=6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x + 6\int \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \log|x-3| + 6\int (x-3)^{-2}\,\mathrm{d}x \\
&= \log|x-3| + 6\frac{(x-3)^{-1}}{-1} + c \\
&= \log|x-3| - \frac{6}{x-3} + c
\end{aligned}$$

2 Numeratore di grado maggiore o uguale al denominatore

$$\int \frac{3x^3+2x}{x^2-2x-2}\,\mathrm{d}x$$

Quando il numeratore ha grado maggiore o uguale a quello del denominatore, $\deg N \geq \deg D$, si può effettuare la divisione tra polinomi per riscrivere la funzione integranda come somma di un polinomio e di una funzione razionale con $\deg N < \deg D$:

$$\begin{array}{r|l}
3x^3+0x^2+\ \ 2x+\ \ 0 & x^2-2x-2 \\ \cline{2-2}
-\,3x^3+6x^2+\ \ 6x & \qquad 3x+6 \\ \hline
6x^2+\ \ 8x+\ \ 0 & \\
-6x^2+12x+12 & \\ \hline
20x+12 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^3+2x}{x^2-2x-2}\,\mathrm{d}x &= \int (3x+6)\,\mathrm{d}x + \int \frac{20x+12}{x^2-2x-2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}x^2+6x+\int \frac{20x+12}{x^2-2x-2}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

L'integrale rimanente ha $\Delta = 4+8 > 0$, quindi potrà essere risolto spezzando la funzione integranda in

$$\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

3 Funzioni razionali qualsiasi

Si vuole integrare una funzione razionale qualsiasi,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

(con $\deg P(x) < \deg Q(x)$, altrimenti si può effettuare la divisione tra polinomi).

Qualunque polinomio

$$Q(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_i \in \mathbb{R},\, a_n \neq 0)$$

può essere scomposto in fattori irriducibili,

$$Q(x) = a_n (x-b_1)^{n_1} \cdots (x-b_j)^{n_j} (\underbrace{x^2+c_1x+d_1}_{\Delta<0})^{m_1} \cdots (\underbrace{x^2+c_kx+d_k}_{\Delta<0})^{m_k}$$

e ciò consente di spezzare la funzione integranda in una somma di frazioni:

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = &\frac{A_{11}}{x-b_1} + \frac{A_{12}}{(x-b_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1n_1}}{(x-b_1)^{n_1}} \\
&\vdots \\
&+ \frac{A_{j1}}{x-b_j} + \frac{A_{j2}}{(x-b_j)^2} + \cdots + \frac{A_{jn_j}}{(x-b_j)^{n_j}} \\
&+ \frac{C_{11}x + D_{11}}{x^2 + c_1 x + d_1} + \frac{C_{12}x + D_{12}}{(x^2 + c_1 x + d_1)^2} + \cdots + \frac{C_{1m_1}x + D_{1m_1}}{(x^2 + c_1 x + d_1)^{m_1}} \\
&\vdots \\
&+ \frac{C_{k1}x + D_{k1}}{x^2 + c_k x + d_k} + \frac{C_{k2}x + D_{k2}}{(x^2 + c_k x + d_k)^2} + \cdots + \frac{C_{km_k}x + D_{km_k}}{(x^2 + c_k x + d_k)^{m_k}}
\end{aligned}
$$

Bisogna quindi integrare ciascun termine di questa scomposizione:

$$
\int \frac{A}{(x-b)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} A\displaystyle\int (x-b)^{-n}\,\mathrm{d}x = A\frac{(x-b)^{1-n}}{1-n} + k & \text{se } n \neq 1 \\ A\log|x-b| + k & \text{se } n = 1 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{Cx + D}{(x^2 + cx + d)^m}\,\mathrm{d}x &= C\int \frac{x + \frac{D}{C}}{(x^2 + cx + d)^m}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{C}{2}\int \frac{2x + 2\frac{D}{C}}{(x^2 + cx + d)^m}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{C}{2}\int \frac{2x + c - c + 2\frac{D}{C}}{(x^2 + cx + d)^m}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{C}{2}\underbrace{\int \frac{2x + c}{(x^2 + cx + d)^m}\,\mathrm{d}x}_{\text{(a)}} + \frac{C}{2}\left(-c + 2\frac{D}{C}\right)\underbrace{\int \frac{1}{(x^2 + cx + d)^m}\,\mathrm{d}x}_{\text{(b)}}
\end{aligned}
$$

(a) $\displaystyle\int \frac{2x + c}{(x^2 + cx + d)^m}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad t = x^2 + cx + d \implies \mathrm{d}t = (2x + c)\,\mathrm{d}x$

$$
= \int \frac{1}{t^m}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int t^{-m}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{1-m}}{1-m} + k = \frac{(x^2 + cx + d)^{1-m}}{1-m} + k & \text{se } m \neq 1 \\ \log|t| + k = \log(x^2 + cx + d) + k & \text{se } m = 1 \end{cases}
$$

Rimane il problema di come risolvere gli integrali del tipo (b). Essi si calcolano riconducendosi al caso

$$\int \frac{1}{(x^2+cx+d)^{m-1}}\,\mathrm{d}x$$

Ad esempio:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \underbrace{x}_{g}\cdot\underbrace{\frac{2x}{(x^2+1)^2}}_{f'}\,\mathrm{d}x \\
&= \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} - \operatorname{arctg} x\right) + c \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2+1}\right) + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int t^{-2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}$$

3.1 Esempio 1

$$\int \frac{1}{x^2+x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2(1+x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2(1+x)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x} \\
&= \frac{Ax(1+x)+B(1+x)+Cx^2}{x^2(1+x)} \\
&= \frac{Ax+Ax^2+B+Bx+Cx^2}{x^2(1+x)} \\
&= \frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^2(1+x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B=0 \\ B=1 \end{cases} \implies \begin{cases} C=1 \\ A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(1+x)}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\log|x| - \frac{1}{x} + \log|1+x| + c\\ &= \log\left|\frac{1+x}{x}\right| - \frac{1}{x} + c\end{aligned}$$

3.2 Esempio 2

$$\int \frac{x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}&\frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\\ &\quad= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\\ &\quad= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\\ &\quad= \frac{Ax^3 + Ax + Ax^2 + A + Bx^3 + Bx - Bx^2 - B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\\ &\quad= \frac{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + A - B - D}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 & \mathrm{I}\\ A-B+D=0 & \mathrm{II}\\ A+B-C=1 & \mathrm{III}\\ A-B-D=0 & \mathrm{IV}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}-\mathrm{III}: 2C = -1 &\implies C = -\frac{1}{2}\\ \mathrm{II}-\mathrm{IV}: 2D = 0 &\implies D = 0\\ \mathrm{II}: A - B + 0 = 0 &\implies A = B\\ \mathrm{I}: 2A - \frac{1}{2} = 0 &\implies A = B = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\log|x-1| + \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\log|x-1| + \frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{4}\log\left|x^2+1\right| + c \\
&= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + c = \frac{1}{4}\log\frac{\left|x^2-1\right|}{x^2+1} + c
\end{aligned}
$$